2/11/18

Ασκήσεις: (Προτάσεις) από το τελ. μάθημα

Πρόταση: $U \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow U' \subset U$

Αποδ: Θνδο: U κλειστό $\Leftrightarrow U' \subset U$

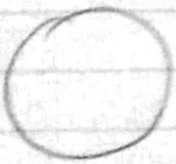
U' = παράγωγο σύνολο του U $\;\big|\;$ $\Leftrightarrow U = \bar{U} \underset{\text{Πρόταση}}{=} U \cup U'$
= σύνολο συμ. σωσ. του U

▨

[Άρα: Θνδο: $U = U \cup U' \Leftrightarrow U' \subset U$ το οποίο είναι προφανές]

Πρόταση: $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε: $\bar{U} = \mathring{U} \cup \partial U$

[Πχ Έστω $U = B(\bar{x}, r) = \mathring{U} \Rightarrow \partial U = \partial B(\bar{x}, r)$
$\Rightarrow U \cup \partial U = B(\bar{x}, r) \cup \partial B(\bar{x}, r) = \bar{B}(\bar{x}, r)$

 = συμβολισμοί για , καλώς ορισμένα σύνολα

Απόδειξη: Γνωρίζουμε, ήδη, ότι $\mathbb{R}^n = \underbrace{\text{int}\,U}_{=\mathring{U}} \cup \text{ext}\,U \cup \underbrace{\text{bd}\,U}_{=\partial U} =$
$= (\mathring{U} \cup \partial U) \cup \text{ext}\,U \;(\Rightarrow \text{ext}\,U = \mathbb{R}^n \setminus (\mathring{U} \cup \partial U))$
ξένα μεταξύ τους

Άρα, εδώ, Θνδο: $\boxed{\text{ext}\,U = \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}} \overset{(0)}{=} \underset{(1)}{\text{int}}(\mathbb{R}^n \setminus \bar{U}) \subset$
$\subset \text{int}(\mathbb{R}^n \setminus U) = \text{ext}\,U$
↑
αφού $U \subset \bar{U} \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus U \supset \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$
και $U \subset V \Rightarrow \text{int}\,U \subset \text{int}\,V$

Από την άλλη, έστω $\bar{x} \in ext\,U \overset{\text{ορσ}}{\Rightarrow} \exists\, \varepsilon>0$: $B(\bar{x},\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus U \Rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus U$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι: $ext\,U \subset \mathbb{R}^n \setminus U'$. Συνεπώς, $\bar{x} \in (\mathbb{R}^n \setminus U) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U') = \mathbb{R}^n \setminus \underbrace{(U \cup U')}_{=\bar{U}}$ Πρόταση

Άρα, δείξαμε: $\bar{x} \in ext\,U \Rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$ δηλ. $ext\,U \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$ (2)

Έχουμε $(1)+(2) = (6)$

Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Ονομάζουμε **ακολουθία** (στον $\mathbb{R}^n$) κάθε απεικόνιση $\mathbb{N} \ni \nu \longmapsto \bar{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$. Την **συμβολίζουμε** $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$

$$= (\bar{x}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} = \{\bar{x}_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} = \{\bar{x}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$$

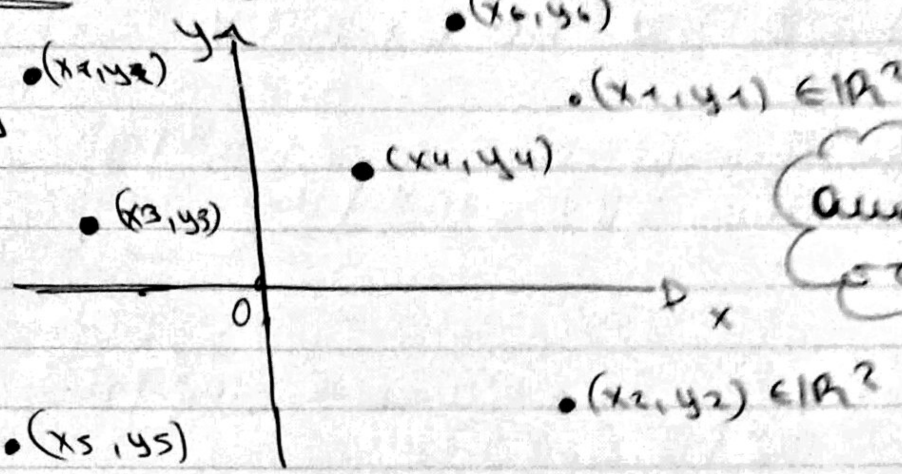
Τα σημεία $\bar{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$ με $\bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$ ονομάζονται όροι της ακολουθίας

Ορισμός: Μια ακολουθία $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνει στο $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, αν: $\underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|}_{\in\mathbb{R}} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$

[δηλ. αν η απόσταση $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|$ των όρων της $\bar{x}_\nu$ από το $\bar{x}_0$, συγκλίνει στο 0]
και γράφουμε $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$

Παραδείγματα: (1)

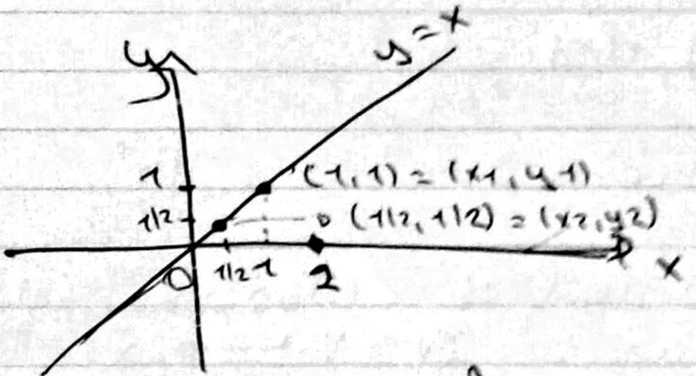
$\boxed{n=2}$



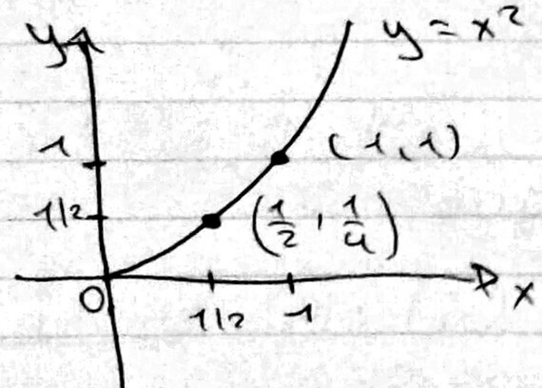
ακολουθία στον $\mathbb{R}^2$

(2)

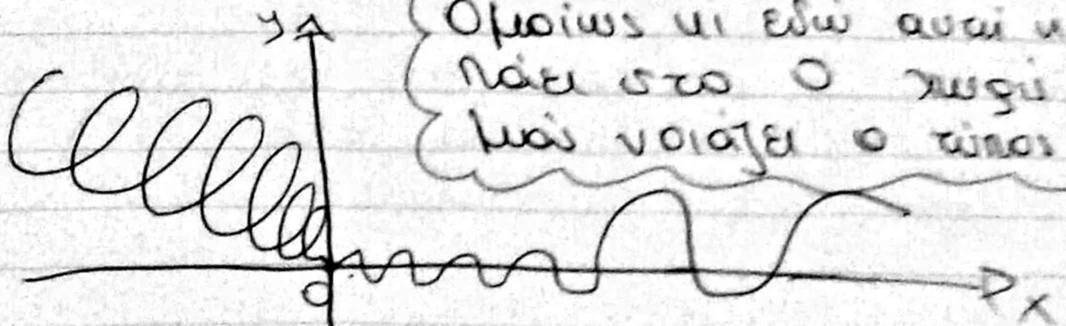
$\boxed{n=2}$



Όπως θα δούμε $\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \to (0,0)$



Όμοια: $\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu^2}\right) \to (0,0)$



Ομοίως κι εδώ αυτή η ακολ. πάει στο O χωρίς να μας νοιάζει ο τύπος της

③ Οι ακολουθίες $(x_\nu, y_\nu) \in \mathbb{R}^2, \nu \in \mathbb{N}$ με
$(x_\nu, y_\nu) = \left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right)$ ή $\left(\frac{1}{\nu}, 0\right)$ ή $\left(0, \frac{1}{\nu^2}\right)$ ή $\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu^2}\right)$
συγκλίνουν όλες στο $(0,0)$ αφού για όλες ισχύει:

$$\underbrace{\|\underbrace{(x_\nu, y_\nu) - (0,0)}_{=(x_\nu, y_\nu)}\|}_{=\sqrt{x_\nu^2 + y_\nu^2}} \to 0$$

[Η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ είναι συνεχής. Συνεπώς:]

$$\underbrace{\sqrt{x_\nu^2 + y_\nu^2}}_{=:a_\nu \geq 0} \to 0 \Rightarrow x_\nu^2 + y_\nu^2 \to 0$$

Ακολ. ορισ. της συνέχειας

$\forall x_0 \in \mathbb{R}: \forall x_\nu \to x_0: f(x_\nu) \to f(x_0)$

<u>Αντίστροφα</u>, $\overbrace{x_\nu^2 + y_\nu^2}^{=:b_\nu} \to 0 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{x_\nu^2 + y_\nu^2}}_{\|b_\nu} \to 0$, αφού
$g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ συνεχής

<u>Εδώ</u> (βλ. παραπ.) αφού έχουμε $x_\nu \to 0$ και
$y_\nu \to 0$ προκύπτει

$$\left.\begin{array}{l} x_\nu^2 \to 0 \\ y_\nu^2 \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_\nu^2 + y_\nu^2 \to 0$$

Άρα αν $x_\nu \to 0$ και $y_\nu \to 0$ τότε: $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0)$

<u>Αντίστροφα</u>, αν $\underbrace{\|(x_\nu, y_\nu)\|}_{=\sqrt{x_\nu^2 + y_\nu^2}} \to 0$, τότε:

$x_\nu \to 0$ και $y_\nu \to 0$ $\qquad = x_\nu^2 + y_\nu^2 \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_\nu^2 \to 0$ και $y_\nu^2 \to 0$ $\quad \left[0 \leq x_\nu^2 \leq x_\nu^2 + y_\nu^2\right]$ κριτ. παρεμβολ.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & x_\nu^2 & \leq & x_\nu^2 + y_\nu^2 \\ \downarrow & \to & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow |x_\nu| \to 0$ και $|y_\nu| \to 0$

$\to$

$x_\nu \to a \Rightarrow |x_\nu| \to \underbrace{|a|}_{=\|x\| \text{ στον } \mathbb{R}^1}$! Ισχύει πάντα

[αφού $f(x) = |x|$ είναι συνεχής]

$|x_\nu| \to |a| \not\Rightarrow x_\nu \to a$ Δεν ισχύει πάντα

Αντιπαράδειγμα: $x_\nu = (-1)^\nu$

Αν $a = 0$ ισχύει

$x_\nu \to 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \nu_0 : \forall \nu \geq \nu_0 : \underbrace{\|x_\nu\|}_{a_\nu} < \varepsilon \Leftrightarrow \underset{|x_\nu|}{\overset{\|}{a_\nu}} \to 0$

[$|x_\nu| \leq \sqrt{x_\nu^2 + y_\nu^2} \to 0 \Rightarrow |x_\nu| \to 0 \Leftrightarrow x_\nu \to 0$]

Άρα, είδαμε ότι: $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0) \overset{!}{\Leftrightarrow} x_\nu \to 0$ και $y_\nu \to 0$

Αντίστοιχα, $\underbrace{(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0)}_{\text{Ορσ}}$

$\Leftrightarrow \|\underbrace{(x_\nu, y_\nu) - (x_0, y_0)}_{= (x_\nu - x_0,\ y_\nu - y_0)}\| \to 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_\nu - x_0 \to 0$ και $y_\nu - y_0 \to 0 \Leftrightarrow x_\nu \to x_0$ και $y_\nu \to y_0$

Άρα $(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0) \Leftrightarrow x_\nu \to x_0$ και $y_\nu \to y_0$

Παρατήρηση: Από τον ορισμό $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Leftrightarrow \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|}_{\in \mathbb{R}} \to 0$

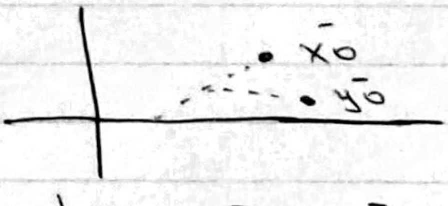
Πολλές από τις ιδιότητες της σύγκλισης της ακολουθίας $(\bar{x}_\nu)$ στον $\mathbb{R}^n$, στο όριο $\bar{x}_0$, προκύπτουν από τις ιδιότητες της σύγκλισης στο $\mathbb{R}$.

Ιδιότητες: ① (Παρατήρηση: $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0$
$\Leftrightarrow \|(\bar{x}_\nu - \bar{x}_0) - \bar{0}\| \to 0 \overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} \bar{x}_\nu - \bar{x}_0 \to \bar{0}$
(δηλ. η σύγκλιση μιας ακολ. $\bar{x}_\nu$ στο όριο $\bar{x}$ ανάγεται στη σύγκλιση της $\bar{x}_\nu - \bar{x}_0$ στο $\bar{0}$)

② (Ισοδύναμος χαρακτηρισμός)
$\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_0 \in \mathbb{N} \; \forall \nu \geq \nu_0 \; (\forall \nu \in \mathbb{N})$:
$: \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0$
$\bar{x}_\nu - \bar{x}_0 \geq 0 \quad \Rightarrow \Big\} = \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|$

③ Το όριο μιας συγκλ. ακολ. είναι μοναδικό (και το συμβολίζουμε με $\lim_{\nu \to \infty} \bar{x}_\nu$ δηλ.

$\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \overset{\text{Συμβ}}{\Leftrightarrow} \lim_{\nu \to \infty} \bar{x}_\nu = \bar{x}_0$



[Έστω $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ και $\bar{x}_\nu \to \bar{y}_0$ με: $\bar{x}_0 \neq \bar{y}_0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \bar{x}_0 - \bar{y}_0 \neq \bar{0} \Leftrightarrow \|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\| > 0$

Τότε για $\varepsilon := \dfrac{\|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\|}{2} > 0$

$\overset{②}{\Rightarrow} \begin{cases} \exists \; \nu_1 : \forall \nu \geq \nu_1 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \varepsilon \\ \exists \; \nu_2 : \forall \nu \geq \nu_2 : \|\bar{x}_\nu - \bar{y}_0\| < \varepsilon \end{cases}$
$\Rightarrow \forall \nu \geq \max\{\nu_1, \nu_2\}$

$\|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\| \leq \|\bar{x}_0 - \bar{x}_\nu\| + \|\bar{x}_\nu - \bar{y}_0\| < 2\varepsilon = \|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\|$
[= άτοπο]

④ Κάθε συγκλίνουσα είναι φραγμένη.

[Έστω $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Rightarrow$ (Για $\varepsilon = 1$ έχουμε από το ②)

$\exists\, \nu_0 \ \forall\, \nu \geq \nu_0 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\bar{x}_\nu\| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| + \|\bar{x}_0\| < 1 + \|\bar{x}_0\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, \nu \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\} : \|\bar{x}_\nu\| \leq \underbrace{\max\{\|x_1\|, \dots, \|\bar{x}_{\nu_0}\|, 1 + \|\bar{x}_0\|\}}_{=: r_0}$

$\Rightarrow \bar{x}_\nu \in B(0,r)$ για κάθε $r > r_0$

⑤ Έστω $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ και $\bar{y}_\nu \to \bar{y}_0$ και $\underbrace{a_\nu}_{\in \mathbb{R}} \to a$ και $b_\nu \to b$

$\Rightarrow a_\nu \bar{x}_\nu + b_\nu \bar{y}_\nu \to a \bar{x}_0 + b \bar{y}_0$

[$\|a_\nu \bar{x}_\nu + b_\nu \cdot \bar{y}_\nu - (a\bar{x}_0 + b \cdot \bar{y}_0)\| = \|a_\nu \bar{x}_\nu - a\bar{x}_0 + b_\nu \bar{y}_\nu - b\bar{y}_0\|$

$\leq \|\underbrace{a_\nu \bar{x}_\nu - a\bar{x}_0}_{= a_\nu(\bar{x}_\nu - \bar{x}_0) + (a_\nu - a)\bar{x}_0}\| + \|b_\nu \bar{y}_\nu - b \cdot \bar{y}_0\| = \underbrace{|a_\nu|}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\|\bar{x}_\nu - x_0\|}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{|a_\nu - a|}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\|\bar{x}_0\|}_{\in \mathbb{R}}$

$\leq C$ ως συγκλ. ακολ. $\to 0$

Άσκηση: Δ.Ο. $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ και $\bar{y}_\nu \to \bar{y}_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\bar{x}_\nu \cdot \bar{y}_\nu}_{\in \mathbb{R}} \to \underbrace{\bar{x}_0 \cdot \bar{y}_0}_{\in \mathbb{R}}$ (Σπίτι)

⑥ Έστω $\bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(k)}) \in \mathbb{R}^k, \nu \in \mathbb{N}$ και

$\bar{x}_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(k)}) \in \mathbb{R}^k$. Τότε:

$\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Leftrightarrow \forall\, i = 1, \dots, k : x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)}$

Απόδ: (Υπενθύμιση) [$\|\bar{x}\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, \dots, k\} \leq$
$\leq \|\bar{x}\| \leq \sqrt{k} \cdot \|\bar{x}\|_\infty \quad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^k$]

$\Rightarrow : \forall\, i = 1, \dots, k : |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| \leq [\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty] \leq \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \to 0$

$|x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| \geq 0$

$(\Leftarrow)$: $\forall i=1,\dots,n$: $x_\nu^{(i)} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} x_0^{(i)}$

$\Rightarrow \forall i=1,\dots,n : \forall \varepsilon>0 \ \exists \nu_i \ \forall \nu \geq \nu_i : |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \forall \nu \geq \max\{\nu_1,\dots,\nu_n\} =: \nu_0 : |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

$\forall i=1,\dots,n \Rightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow$

$\Downarrow$

Υπενθύμιση: $\Rightarrow \dots \frac{1}{n}\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \varepsilon \Rightarrow \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$